

## **OCENA METOD WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW ELASTYCZNOŚCI DOCHODOWEJ POPYTU**

Michał Sznajder, Grażyna Adamczyk

**Streszczenie.** Niniejszy artykuł przedstawia różne metody szacowania współczynników elastyczności dochodowej popytu, a także weryfikację tych metod. Stwierdzono, iż najlepsze dopasowanie statystyczne do badania wpływu dochodu na popyt mierzony wielkością wydatków mają funkcje osiągające asymptotę. Kolejna weryfikacja merytoryczna dowiodła, iż najlepsze odwzorowanie dotyczące ewolucji wydatków na produkty żywnościowe uzyskano w przypadku zastosowania modelu Workinga (hiperboliczno-logarytmiczny).

**Słowa kluczowe:** popyt, dochód, elastyczność dochodowa popytu.

### **WSTĘP**

Dochód – ze względu na swoje wielokierunkowe oddziaływanie na wielkość i strukturę popytu konsumpcyjnego – jest istotnym wyróżnikiem. Szczególnie ważny i znaczący ładunek informacji niesie reakcja popytowa konsumentów na zmiany poziomu dochodu. Miernikiem służącym do określania wpływu dochodu na zmianę popytu jest wskaźnik elastyczności dochodowej popytu. Obrazuje on związek między relatywną zmianą dochodów a relatywną zmianą wydatków na dany towar bądź zmianą jego spożycia. Jego wartość jest zwykle większa od zera, gdyż z reguły wzrostowi dochodów towarzyszy wzrost wydatków. Nierzadko jednak występuje zupełnie odwrotna sytuacja. Reakcje dodatnie na wzrost dochodu są niejednakowe dla dóbr o różnym stopniu pilności i zaspokajania potrzeb. Dobra podstawowe mają z reguły elastyczność mniejszą od jedności i większą od zera. Jest ona tym niższa, im dobro jest bardziej niezbędne.

Współczynnik elastyczności może jednak przyjmować także wartości ujemne, co wskazuje na spadek popytu – a więc i wydatków – na określone dobro w miarę wzrostu dochodu konsumenta. Dotyczy to w szczególności dóbr niższego rzędu. Wreszcie, w miarę wzrostu dochodów popyt może nie wykazywać żadnej reakcji, być sztywny, co ma miejsce w przypadku dóbr najbardziej podstawowych i niezbędnych w codziennym życiu (np. sól, mąka).

---

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie wybranych metod szacowania współczynników elastyczności, weryfikacja tych metod oraz zasady interpretacji uzyskanych wyników.

## MATERIAŁ I METODA

Materiałem w niniejszym opracowaniu były dane statystyki publicznej, pochodzące z badania budżetów gospodarstw domowych. Wykorzystano dane dotyczące dochodów, wydatków i spożycia dla grupy społeczno-ekonomicznej gospodarstw domowych pracowników. Zależności między dochodem a wydatkami i spożyciem zanalizowano dla okresu 1993–2000.

W celu analizy danych zastosowano metodę opartą na elastyczności popytu, zaliczaną do grupy metod analizujących uwarunkowania i współzależności występowania różnych zjawisk rynkowych [Kramer 1994, Mynarski 1987]. Wykorzystano tu elastyczność dochodową popytu, a miernikiem określającym zależność między popytem a dochodem był współczynnik elastyczności dochodowej wydatków na żywność. Współczynniki elastyczności dochodowej wydatków oszacowano stosując różne rodzaje funkcji, tj. liniową, logarytmiczną, paraboliczną, hiperboliczną, wykładniczą, logarytmiczno-arytmetyczno-odwrotną, podwójnie logarytmiczną, hiperboliczną Törnquista, logarytmiczno-hyperboliczną Workinga.

### Znaczenie współczynników elastyczności dochodowej popytu

Wysokość uzyskiwanego przez konsumenta dochodu wpływa bezpośrednio na wielkość całkowitych wydatków konsumpcyjnych oraz wyznacza ogólne proporcje, w jakich zostaje on przeznaczony na konsumpcję i oszczędności. Wraz ze wzrostem dochodu konsumentów rosną ich wydatki konsumpcyjne, jednak nie wprost proporcjonalnie do ich dochodu, co jest zgodne z podstawowym prawem psychologicznym społeczeństwa, które sformułował J.M. Keynes [Rudnicki 2000].

Podstawowa zależność między dochodem a popytem stwierdza, że im wyższe dochody ludności, tym wyższy popyt – i odwrotnie. Ma ona potwierdzenie raczej w odniesieniu do globalnego popytu (jako całości), natomiast niekoniecznie do popytu na poszczególne dobra. Nie zawsze bowiem wzrost dochodu powoduje wzrost popytu na określone dobro – jak to ma miejsce w przypadku dóbr niskiej wartości. Ponadto, wzrost dochodu nie powoduje jednakowych zmian w popycie na poszczególne dobra.

Poza atrybutami produktów i ich miejscem w hierarchii zaspokajania potrzeb konsumentów, reakcje końcowych odbiorców na wzrost dochodu bywają niejednakowe. Inaczej na ten fakt reagują konsumenci biedni, a inaczej bogaci. Wzrost dochodów konsumentów gorzej uposażonych powoduje zwiększenie wydatków na zakup dóbr zaspokajających najbardziej pilne, podstawowe potrzeby. Z kolei wzrost dochodów konsumentów bogatszych, mających już zaspokojone potrzeby podstawowe, pociąga za sobą przyrost wydatków na dobra trwałego użytku, kulturę, kształcenie.

Każdy wzrost dochodu nie powoduje jednak natychmiastowych zmian w wielkości i strukturze wydatków, konsumenci bowiem przy określonym poziomie dochodu mają

pewien ustalony schemat wydatków, żywienia i własny styl życia. Dopiero po pewnym czasie konsumenci zmieniają swój dotychczasowy styl życia na „styl życia konsumenta zamożniejszego” [Mynarski 1967].

Jeszcze dłużej trwa zmiana stylu życia konsumenta przy spadku jego dochodu. Dąży on wówczas do zachowania, często przez długi czas, osiągniętego poziomu życia, struktury wydatków, przyzwyczajeń konsumpcyjnych czy modelu żywienia przez zużywanie oszczędności, zaciąganie pożyczek itp. Taka zachowawcza postawa daje konsumentowi nadzieję, iż jego sytuacja w przyszłości ulegnie poprawie. Zjawisko to określa się *efektem rygla*, co oznacza iż osiągnięcie wyższego poziomu konsumpcji jest w pewnej mierze procesem nieodwracalnym, gdyż raz nabyte nawyki konsumpcyjne działają przy niższych dochodach jak rygiel hamujący obniżanie się poziomu konsumpcji [Kramer 1994, Rudnicki 2000].

Popyt konsumpcyjny warunkowany jest zmianami zachodzącymi nie tylko w poziomie dochodu, ale także i w jego strukturze. Chociaż różne są teorie i opinie na temat składników dochodu, większość badaczy tych zależności zgodnie twierdzi, iż obok części dochodu przeznaczonego na zaspokojenie potrzeb podstawowych, istnieje pewna jego część, w ramach której wybory konsumenta są bardziej swobodne. Tę część dochodów Engel określił mianem *nadwyżki dochodów*, a zjawisko to określane jest mianem tzw. drugiego prawa Engla, zgodnie z którym wydatki luksusowe lub oszczędności występują tylko przy wysokim dochodzie, przekraczającym zaspokojenie potrzeb podstawowych, natomiast Katona – *funduszem swobodnej decyzji* [Sojkin 1994, Rudnicki 2000]. Istnieje zatem pewna strategia wyboru konsumentów w tej części wydatków konsumpcyjnych, które pokrywane są z dochodu pozostającego do dyspozycji, po zaspokojeniu potrzeb podstawowych. Dysponowanie tym funduszem z reguły nie ma charakteru nawykowego. Konsument bowiem przy podejmowaniu decyzji ma alternatywę wyboru innych produktów, alternatywę wydatkowania lub oszczędzania.

Zatem znajomość dochodowej elastyczności popytu ma bardzo istotne znaczenie w prognozowaniu zmian wielkości i struktury popytu konsumpcyjnego, zachodzących pod wpływem makroekonomicznego rozwoju kraju, wzrostu gospodarczego i zmiany poziomu zamożności społeczeństwa.

Obserwacje i badania dotyczące reakcji popytu na zmiany dochodów, wydatków, a także analizy budżetów gospodarstw domowych pozwalają na określenie wielkości wydatków na poszczególne dobra i usługi, a także na ustalenie hierarchii tych wydatków. Dzięki temu istnieje możliwość wskazania, które z wydatków zaspokajają potrzeby najbardziej podstawowe, a które potrzeby wyższego rzędu.

Ponadto, badanie zmian popytu pod wpływem zmian dochodów jest przydatne do określania wskaźnika kosztów utrzymania w różnych grupach społeczno-ekonomicznych ludności. Wskaźnik ów, zwany dokładniej indeksem wzrostu kosztów utrzymania, odgrywa kluczową rolę np. w negocjowaniu podwyżek płac czy rewaloryzacji świadczeń emerytalno-rentowych. Znajomość wysokości współczynników i ich względnych zmian pod wpływem różnych czynników ma istotne znaczenie także przy prowadzeniu odpowiedniej polityki socjalnej państwa [Marciniak 1999].

## Metody szacowania współczynników elastyczności dochodowej popytu

Istnieje wiele metod, według których można oszacować współczynniki elastyczności dochodowej popytu. Najwięcej studiów empirycznych nad wpływem dochodu na wydatki konsumentów przeprowadził E. Engel. Sformułował on wiele praw rządzących wydatkami wraz ze zmianą czynników ekonomicznych, zwłaszcza dochodu.

Jako miernik, określający wpływ dochodu na wydatki w gospodarstwach domowych, wprowadzono w ówczesnym czasie wskaźnik dochodowej elastyczności popytu. W formie przyrostowej można go określić według wzoru [Mynarski 1987, Kamerschen i in. 1991]:

$$e_d = \frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta q}{\Delta d} \cdot \frac{d}{q} \quad (1)$$

gdzie:  $q$  – wielkość wydatków,  $d$  – wielkość dochodów,  $\Delta q$ ,  $\Delta d$  – zmiana wydatków, dochodów.

Po okresie szczytowego rozwoju teorii równowagi konsumenta i popytu oraz po dokonaniach E. Engla, wedle których popyt uzależniano głównie od cen i dochodów, w latach trzydziestych. XX wieku nadszedł czas, kiedy to „krzywe Engla” doczekały się oprawy matematycznej i statystycznej. W badaniach tych zależności można wyróżnić dwie grupy modeli ekonometrycznych, w zależności od tego, jaką fazę rozwoju spożycia czy wydatków obrazują. Pierwsza grupa tych modeli służy do opisu rozwoju spożycia czy wydatków na te dobra, które są w fazie szybkiego wzrostu. Można w tym wypadku zastosować funkcje rosnące lub malejące nieograniczenie, np. liniową, paraboliczną, wykładniczą i logarytmiczno-liniową. Druga grupa modeli ekonometrycznych jest bliższa rzeczywistości, gdyż odzwierciedla sytuację nasycenia spożycia określonych dóbr czy wydatków na nie, przy czym tempo wzrostu jest coraz wolniejsze. W odniesieniu do tych zależności można wyznaczyć poziom nasycenia spożycia bądź wydatków na dane dobro. W tym przypadku znajdują zastosowanie funkcje mające asymptotę, przede wszystkim funkcja hiperboliczna i logarytmiczno-hyperboliczna. Poniżej scharakteryzowano kilka funkcji najczęściej wykorzystywanych do określania współczynników elastyczności popytu.

W 1935 roku Allen i Bowley [Mynarski 1987, Kos 1991] postawili tezę, iż zależności angielskie w niewielkim przedziale zmienności dochodu mogą być aproksymowane za pomocą linii prostych opisanych przez równanie:

$$y = a + bx \quad (2)$$

gdzie:  $y$  – wielkość wydatków lub spożycia;  $x$  – wielkość dochodów;  $a$ ,  $b$  – parametry funkcji.

Funkcja ta znajduje dość powszechne zastosowanie w badaniu zależności między popytem a dochodem, choć nie jest pozbawiona mankamentów. Zakłada bowiem liniowość spożycia czy wydatków wraz ze wzrostem dochodów, a więc te same przyrosty bądź spadki. W rzeczywistości rzadko tak się zdarza, choć jest to prawdopodobne. Funkcję stosuje się często, z zastrzeżeniem jednak do małych przedziałów zmienności dochodów.

Istotną wartość dla opisu zależności mają parametry funkcji. Parametr  $a$  wskazuje na „pilność” wydatków bądź potrzeby spożycia produktu, przy czym im wyższa wartość parametru  $a$  funkcji, tym pilniejsza potrzeba. Przez pojęcie „pilność” rozumieć należy nadrzędność potrzeby w hierarchii wydatków lub spożycia. Na przykład w obrębie potrzeb żywnościowych najpierw zaspokajane są potrzeby podstawowe, dotyczące wydatków na mąkę, sól, pieczywo itp. Są to zatem najbardziej „pilne” wydatki. Z kolei parametr  $b$  tej funkcji informuje o przeciętnym przyroście bądź spadku wydatków czy spożycia w miarę wzrostu dochodów.

Otrzymane parametry funkcji pozwalają na oszacowanie współczynnika elastyczności dochodowej wydatków bądź spożycia według wzoru:

$$e = \frac{bx}{(a + bx)} \quad (3)$$

Współczynnik ów jest zmienny w zależności od poziomu dochodów i uzależniony od znaku parametru  $a$ . Dodatni parametr  $a$  powoduje, iż współczynniki przyjmują wartości mniejsze od jedności, ujemna wartość parametru  $a$  powoduje, że wartość współczynnika elastyczności przekracza jeden.

Inną funkcją, godną uwagi, jest funkcja hiperboliczna, zwana też funkcją Törnquista [Mynarski 1987, Kos 1991, Guzik 1999]. Ma ona znacznie szersze zastosowanie w badaniu zależności englojskich. Została zastosowana w latach czterdziestych XX wieku, oparto się na stosunkach funkcji liniowych. Sformułowano wtedy cztery postaci zależności dla różnych grup wydatków. Funkcja ta ma inną postać dla artykułów pierwszej potrzeby, niższego rzędu, wyższego rzędu oraz luksusowych. Wiąże się to z prawidłowościami rozwoju wydatków przy zmianie dochodu i z ich substytucją. Każda z wymienionych funkcji osiąga inny punkt nasycenia i ma odmienny przebieg. Po osiągnięciu stanu nasycenia wydatków na dobra niższego rzędu i podstawowe przyrost dochodu powoduje wzrost wydatków na dobra wyższego rzędu, gdzie z kolei po przekroczeniu punktu nasycenia pojawiają się wydatki na dobra luksusowe, które wzrastają nieograniczenie [Mynarski 1987]. Za cytowanym autorem równania tych funkcji przedstawiają się następująco:

1) dla artykułów pierwszej potrzeby

$$y = \frac{ax}{x + b} \quad (a, b > 0) \quad (4)$$

2) dla artykułów wyższego rzędu

$$y = \frac{a(x - c)}{x + b} \quad (a, c > 0; b > -c) \quad (5)$$

3) dla artykułów luksusowych

$$y = \frac{ax(x - c)}{x + b} \quad (a, c > 0; b > -c) \quad (6)$$

4) dla artykułów niższego rzędu

$$y = \frac{a(x - c)}{x - b} \quad (a > 0; x > b > c) \quad (7)$$

gdzie:  $y$  – wielkość wydatków lub spożycia;  $x$  – wielkość dochodów;  $a, b, c$  – parametry funkcji.

Cechą tego modelu jest istnienie asymptoty, czyli tzw. punktu nasycenia, do którego rosną spożycie lub wydatki w sytuacji, gdy dochód osiąga wysoki poziom. Poziom nasycenia jest wyznaczony przez parametr  $a$  funkcji i jest asymptotą poziomą wyznaczającą maksymalny poziom wydatków. Z kolei parametr  $b$  jest asymptotą pionową (dochodu) i przyjmuje wartości z reguły większe od zera. W odniesieniu do produktów niższego rzędu zastosowanie tej postaci funkcji daje parametr  $b$  mniejszy od zera, a przebieg tej funkcji będzie malejący. W tym przypadku parametr  $a$  wyznacza nie poziom nasycenia, lecz minimalny poziom konsumpcji czy wydatków. Parametr  $c$  funkcji opisuje z kolei pilność określonej potrzeby spożycia czy wydatków. W ujęciu graficznym jest przesunięciem wykresu funkcji na osi  $X$ . Oszacowane parametry pozwalają na wyznaczenie współczynnika elastyczności dochodowej według wzorów, odpowiednio:

1) dla artykułów pierwszej potrzeby

$$e = \frac{b}{x + b} \quad (8)$$

2) dla artykułów wyższego rzędu

$$e = \frac{x}{x - c} - \frac{x}{x + b} \quad (9)$$

3) dla artykułów luksusowych

$$e = 1 + \frac{x}{x - c} - \frac{x}{x + b} \quad (10)$$

4) dla artykułów niższego rzędu

$$e = \frac{x}{x - c} - \frac{x}{x - b} \quad (11)$$

Współczynniki te są zmienne i maleją do zera w sytuacji przechodzenia od niższych do wyższych dochodów, zbliżając się asymptotycznie do zera przy bardzo wysokim ich poziomie.

Elastyczność dochodowa wydatków na dobra pierwszej potrzeby jest większa od zera i mniejsza od jedności i maleje w miarę wzrostu dochodu. Elastyczność dochodowa wydatków na dobra wyższego rzędu jest większa od zera i maleje do zera w miarę wzrostu dochodu, chociaż tempo spadku jest znacznie powolniejsze. Z kolei elastyczność dochodowa wydatków na dobra luksusowe jest dodatnia i większa od jedności i rośnie w miarę wzrostu dochodu. Elastyczność dochodowa wydatków na dobra niższego rzędu jest odwróceniem zależności dla dóbr wyższego rzędu. Ma znak ujemny i zmierza do zera w miarę wzrostu dochodów.

Modele Törnquista charakteryzują się dużą elastycznością, a więc zdolnością opisywania zależności engloveskich w szerokich przedziałach dochodowych. Mają też pewne mankamenty, które opisuje m.in. Mynarski [1987]. Polegają one na trudności estymacji, ze względu na to, iż występują w postaci tych funkcji trzy parametry związane zależnościami nieliniowymi. Jednakże można tę niedoskonałość zniwelować, dokonując odpowiednich transformacji równań tych funkcji, co szczegółowo przedstawia Mynarski [1987].

Poszukując coraz to lepszych rozwiązań w celu opisywania zależności między dochodami i wydatkami, H. Working [Mynarski 1987] użył funkcji logarytmicznej wyrażonej wzorem:

$$\frac{y}{x} = a - b \ln x \quad (a, b > 0) \quad (12)$$

Funkcja ta maleje i odzwierciedla spadek udziału wydatków na dane dobro w miarę wzrostu dochodów. Wyznaczenie parametrów funkcji pozwala na określenie elastyczności dochodowej wydatków, która ma wartości mniejsze od jedności i maleje w miarę wzrostu dochodów. Elastyczność tę można wyliczyć, korzystając ze wzoru:

$$e = 1 - \frac{b}{a - b \ln x} \quad (13)$$

Inną odmianą tzw. modelu Workinga jest funkcja logarytmiczno-hiperboliczna [Kos 1991]. Ma także sporo zalet z punktu widzenia ekonometrycznych badań zależności między dochodem a wydatkami czy spożyciem. Ma asymptotę wyznaczającą poziom nasycenia, opisuje ewolucję wydatków czy spożycia w bardzo dużych przedziałach zmienności dochodów. Pozwala także na oszacowanie zmiennych współczynników elastyczności. Przebieg tej funkcji pozwala na opis przebiegu spożycia czy wydatków od fazy szybkiego wzrostu, przez fazę wolniejszego wzrostu do asymptotycznego zmierzania do poziomu nasycenia. Wyrażona jest ona wzorem:

$$y = e^a + \frac{b}{x} \quad (14)$$

gdzie:  $a$ ,  $b$ ,  $e$  to parametry funkcji.

Poziom nasycenia spożycia bądź wydatków określony jest jako  $y_{\max} = e^a$ , z kolei współczynnik elastyczności na podstawie oszacowanych parametrów można obliczyć według wzoru:

$$e = \frac{b}{x} \quad (15)$$

Inny badacz – J.L. Nicholson – użył do określenia omawianych zależności i wyznaczenia krzywej Engla funkcji drugiego stopnia, czyli paraboli o równaniu [Mynarski 1987]:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a < 0) \quad (16)$$

Zaletą zastosowanej funkcji jest to, iż pozwala ona na ustalenie poziomu dochodów, przy których wydatki na dany artykuł osiągają punkt maksymalny. Odpowiada on wierzchołkowi paraboli. Elastyczność dochodową wydatków wyznaczoną na podstawie paraboli można przedstawić wzorem:

$$e = \frac{(2ax + b)x}{y} \quad (17)$$

Elastyczność przyjmuje wartości dodatnie i maleje do zera, kiedy funkcja podąża w kierunku maksimum, a następnie przyjmuje wartości ujemne.

W latach pięćdziesiątych S.J. Prais zaproponował kilka innych postaci funkcji do przedstawiania zależności angielskich. Jedną z nich była funkcja podwójnie logarytmiczna (logarytmiczno-liniowa), którą przedstawił wzorem [Mynarski 1987]:

$$\ln y = a + b \ln x \quad (18)$$

Odzwierciedla ona coraz wolniejszy wzrost wydatków w miarę stałego wzrostu dochodów. Ma ona stały współczynnik elastyczności wyrażony parametrem  $b$  funkcji.

$$e = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = b \quad (19)$$

Gdy parametr  $b$  jest większy od zera i mniejszy od jedności, poziom wydatków rośnie coraz wolniej w miarę wzrostu dochodów. Jest to sytuacja typowa dla produktów podstawowych. Z kolei, jeżeli parametr  $b$  funkcji jest większy od jedności, co wiąże się z wysoką elastycznością, wydatki rosną szybciej niż dochód. Funkcję tę można stosować także do opisu np. ewolucji spożycia czy wydatków produktów niższego rzędu, na które popyt maleje, w miarę jak rośnie dochód. W tej sytuacji elastyczność jest ujemna. Podobnie jak inne omówione funkcje, również i ta ma kilka mankamentów, przede wszystkim stały, niezależny od poziomu dochodów współczynnik elastyczności, a także brak możliwości określenia poziomu nasycenia. Inną funkcją proponowaną do określania zależności angielskich jest funkcja logarytmiczno-arytmetyczno-odwrotna wyrażona wzorem [Mynarski 1987]:

$$\ln y = a - \frac{b}{x} \quad (20)$$

Jest to funkcja rosnąca, która zmierza do asymptoty poziomej  $\ln y = a$ . W przebiegu arytmetycznym tej funkcji najpierw mamy wzrost w tempie coraz szybszym do tzw. punktu krytycznego, a następnie tempo wzrostu słabnie, w miarę jak funkcja zdąża do poziomu nasycenia wyznaczonego przez asymptotę poziomą  $y = e^a$ .

Elastyczność dla tej funkcji można wyznaczyć wzorem:

$$e = \frac{b}{x} \quad (21)$$

Elastyczność ta ma wartości dodatnie i maleje do zera, w miarę jak funkcja zmierza do poziomu nasycenia.



Prais zaproponował także inną postać funkcji logarytmicznej, tylko z osią poziomą logarytmiczną, wyrażoną wzorem [Mynarski 1987]:

$$y = a + b \ln x \quad (22)$$

Jest ona prostą o współczynniku kierunkowym równym parametrowi  $b$ . Rośnie ona w tempie coraz wolniejszym, w miarę wzrostu dochodów. Elastyczność dochodowa jest także malejąca i wyraża się wzorem:

$$e = \frac{b}{y} \quad (23)$$

Z kolei zaproponowana przez wspomnianego autora funkcja hiperboliczna rośnie, zdążając do poziomu nasycenia równego parametrowi  $a$  funkcji. Wyrażona została wzorem:

$$y = a - \frac{b}{x} \quad (24)$$

Oszacowane parametry funkcji pozwalają na wyznaczenie elastyczności, która jest dodatnia i rosnąca do poziomu nasycenia, a wyrażona jest wzorem:

$$e = \frac{b}{xy} \quad (25)$$

W latach 60. XX wieku L.M. Goreux zaproponował w szczególności dwa modele funkcji do badania zależności englofskich. Pierwsza z nich to funkcja podwójnie logarytmiczna odwrotna, wyrażona wzorem:

$$\ln y = a - \frac{b}{x} - c \ln x \quad (26)$$

W charakterystyce tej funkcji istotne jest to, iż ma ona dwa punkty przegięcia, między którymi osiąga maksimum.

Elastyczność dochodowa dla tej funkcji ma przebieg malejący i wyraża się wzorem:

$$e = \frac{b - cx}{x} \quad (27)$$

Druga z tych funkcji zwana jest parabolą logarytmiczną i opisana jest równaniem:

$$y = a + b \ln x - c \ln^2 x \quad (28)$$

Ma ona jeden punkt przegięcia i jedno maksimum. Elastyczność dochodowa dla tej funkcji przyjmuje postać:

$$e = \frac{b - 2c \ln x}{y} \quad (29)$$

## Analiza współczynników elastyczności dochodowej popytu

W niniejszym opracowaniu w celu zilustrowania dochodowej elastyczności popytu przedstawiono analizy współczynników dla tzw. średniej grupy dochodowej gospodarstw domowych. W tym celu posłużono się danymi statystyki publicznej, pochodzącymi z badania budżetów gospodarstw domowych. Wykorzystano dane dotyczące dochodów, wydatków i spożycia dla grupy społeczno-ekonomicznej gospodarstw domowych pracowników. Zależności między dochodem a wydatkami i spożyciem analizowano w przekroju czasowym dla okresu 1993–2000. Zastosowano następujące rodzaje funkcji i ich odmiany: liniową (wzór 2.), logarytmiczną (wzór 22.), paraboliczną (wzór 16.), hiperboliczną (wzór 24.), wykładniczą [Guzik 1999], logarytmiczno-arytmetyczno-odwrotną (wzór 20.), podwójnie logarytmiczną (wzór 18.), hiperboliczną Törnquista (wzór 4.), logarytmiczno-hyperboliczną Workinga (wzór 14.). Następnie określono stosowne współczynniki i parametry zastosowanych funkcji. Poniżej przedstawiono analizę współczynników elastyczności popytu, obliczonych z wykorzystaniem wymienionych funkcji ekonometrycznych, dla grupy gospodarstw domowych o przeciętnych dochodach, dla roku 2000.

Popyt konsumpcyjny reprezentowany przez gospodarstwa domowe można mierzyć wielkością wydatków na poszczególne dobra lub poziomem ich spożycia.

Analiza współczynników elastyczności popytu wskazała na niższą elastyczność dochodową spożycia niż wydatków. Zasadniczo w elastyczności wydatków zawarte są także elementy jakościowe. W miarę wzrostu dochodów wzrasta nie tylko ilościowe spożycie produktów żywnościowych, ale również i ich jakość. Stąd mamy do czynienia ze wzrostem kosztu, co znajduje swoje odzwierciedlenie w wyższych współczynnikach elastyczności wydatków. Otrzymano też stosunkowo niewielkie różnice między dwoma rodzajami współczynników, porównując je dla analogicznych grup produktów. W niniejszym opracowaniu przedstawiono zatem tylko parę konkluzji związanych z reakcją wydatków żywnościowych na zmianę poziomu dochodu w gospodarstwach domowych. Współczynniki elastyczności dochodowej wydatków obliczono, wykorzystując różne metody i modele ekonometryczne, co ilustruje tabela 1.

W niniejszej analizie, po weryfikacji statystycznej modeli, najlepsze dopasowanie uzyskano w przypadku funkcji Törnquista (zastosowano tylko pierwszą postać tej funkcji dla dóbr i usług podstawowych), modelu Workinga (funkcja hiperboliczno-logarytmiczna), a także funkcji logarytmicznej. Zastosowanie dwóch pierwszych modeli pozwoliło na określenie poziomu nasycenia wydatków na żywność i wybrane produkty konsumpcyjne (parametr  $a$  funkcji). Z kolei wykorzystanie funkcji logarytmicznej do określenia zależności między dochodami i wydatkami zilustrowało prawidłowość spadku udziału wydatków na większość dóbr konsumpcyjnych, zwłaszcza podstawowych, w miarę wzrostu dochodów. Elastyczność dochodowa popytu w tym wypadku maleje, a więc przy wyższym poziomie dochodów reakcja popytowa jest coraz mniejsza.

Wszystkie przedstawione współczynniki mieszczą się w przedziale od zera do jedności, a w odniesieniu do niektórych produktów w przedziale od 0 do 0,5. Elastyczność dochodowa popytu na tłuszcze jadalne, pieczywo, warzywa i cukier jest zatem niska i wskazuje na dosyć wysoki poziom nasycenia popytu mierzonego poziomem wydatków.

Tabela 1. Wartości współczynników elastyczności dochodowej popytu oszacowanych według różnych funkcji matematycznych

Table 1. Values of income demand elasticity evaluated related to different mathematic functions

Grupy produktów Product groups	Współczynniki elastyczności obliczone według funkcji: Elasticity coefficients calculated related to function:								
	liniowej linear (wzór 3.) (formula 3.)	logarytmicznej logarithmic (wzór 23.) (formula 23.)	parabolicznej parabolic (wzór 17.) (formula 17.)	hiperbolicznej hyperbolic (wzór 25.) (formula 25.)	wykładniczej eksponential	logarytmiczno- arytmetyczno- odwrotnej (wzór 21.) logarithmic- arithmetic - inverted (formula 21.)	podwójnie logarytmicznej double logarithmic (wzór 19.) (formula 19.)	hiperbolicznej Tömquista hyperbolic of Tömquist (wzór 8.) (formula 8.)	logarytmiczno- hiperbolicznej Workinga logarithmic- hyperbolic of Working (wzór 15.) (formula 15.)
Żywność Food	0,83	0,35	0,49	0,23	0,24	0,37	0,75	0,61	0,37
Przetwory zbożowe Cereal products	0,99	0,55	0,8	0,26	0,44	0,47	0,98	0,90	0,47
Pieczywo Bread	0,98	0,50	0,70	0,24	0,47	0,39	0,81	0,66	0,39
Tłuszcze jadalne Edible fats	0,74	0,47	0,59	0,23	0,46	0,33	0,64	0,54	0,33
Nabiał i jaja Dairy products and eggs	0,86	0,50	0,71	0,24	0,41	0,39	0,78	0,66	0,39
Cukier i wyroby cukiernicze Sugar and con- fectionery	0,75	0,47	0,68	0,23	0,49	0,35	0,70	0,57	0,35

cd. tabeli 1

Grupy produktów Product groups	Współczynniki elastyczności obliczone według funkcji: Elasticity coefficients calculated related to function:								
	liniowej linear (wzór 3.) (formula 3.)	logarytmicznej logarithmic (wzór 23.) (formula 23.)	parabolicznej parabolic (wzór 17.) (formula 17.)	hiperbolicznej hyperbolic (wzór 25.) (formula 25.)	wykładniczej eksponential	logarytmiczno- arytmetyczno- odwrotnej (wzór 21.) logarithmic- arithmetic - -inverted (formula 21.)	podwójnie logarytmicznej double logarithmic (wzór 19.) (formula 19.)	hiperbolicznej Törnquista hyperbolic of Törnquist (wzór 8.) (formula 8.)	logarytmiczno- hiperbolicznej Workinga logarithmic- hyperbolic of Working (wzór 15.) (formula 15.)
Warzywa i przetwory Vegetables and products	0,84	0,48	0,94	0,22	0,46	0,35	0,72	0,55	0,35
Owoce i prze- twory Fruits and pro- ducts	0,89	0,56	0,54	0,04	0,56	0,41	0,84	0,77	0,41
Mięso i przet- wory Meat and pro- ducts	0,75	0,44	0,61	0,21	0,28	0,32	0,64	0,50	0,32
Ryby i przetwory Fish and pro- ducts	0,93	0,54	0,55	0,25	0,92	0,42	0,87	0,73	0,42

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych GUS 2000.

Source: Own calculation on the base on Central Statistical Office 2000.

Im wyższe współczynniki, tym bardziej poziom wydatków na określone dobra jest odległy od poziomu nasycenia. Relatywnie niskie reakcje popytowe mierzone poziomem wydatków na zmiany dochodów (ich wzrost, lecz o coraz mniejszej dynamice) obserwowano w odniesieniu do produktów zajmujących pokaźne miejsce w rozchodach konsumentów, a więc mięsa i przetworów oraz nabiału.

Zgodnie z uzyskanymi współczynnikami elastyczności popytu, przy każdorazowym wzroście dochodu o 10% wydatki na żywność wznoszą się w przedziale od około 3,5% (elastyczność według funkcji logarytmicznej), przez niecałe 4,0% (elastyczność według modelu Workinga) aż do 6,0% (elastyczność według modelu Törnquista).

Spośród trzech wspomnianych modeli funkcji najlepiej dopasowanych statystycznie wydaje się, iż najbardziej zgodne z merytorycznym i intuicyjnym odczuciem dotyczącym zachowania konsumenta wobec zmiany dochodu są elastyczności opisane modelem hiperboliczno-logarytmicznym Workinga. Funkcja ta doskonale opisuje ewolucję spożycia czy wydatków bardzo wielu analizowanych produktów żywnościowych. Mianowicie, po fazie szybkiego wzrostu następuje faza coraz wolniejszej jego dynamiki, po czym przebieg krzywej obrazującej udział wydatków zmierza asymptotycznie do poziomu nasycenia. Przy rosnących dochodach każde 10% jego przyrostu powoduje około 3,5-procentowy przyrost wydatków na takie produkty, jak: mięso, tłuszcze jadalne, cukier i wyroby cukiernicze, warzywa i przetwory. Należy przy tym zauważyć, iż w porównaniu do innych artykułów przyrost ten jest relatywnie niewielki. Biorąc pod uwagę długą perspektywę czasową, zastosowany model ekonometryczny doskonale obrazuje ewolucję spożycia i wydatków na np. masło. W krótszej perspektywie czasowej można by odwołać się do ewolucji popytu na m.in. tłuszcze roślinne.

### **Ocena metod określania elastyczności dochodowej popytu i weryfikacja wskaźników**

Przy omawianiu przydatności współczynników dochodowej elastyczności do prognozowania popytu żywnościowego należy zwrócić uwagę na kilka aspektów, które istotnie ważą na jakości i wartości uzyskanych na ich podstawie informacji. Poniżej opisano kilka z nich.

*Po pierwsze* – dane źródłowe. Dane źródłowe powinny mieć charakter pierwotny i być reprezentowane przez dużą liczbę jednostek próby. Taki materiał badawczy daje możliwość podziału badanej populacji na grupy (kwartyle, kwintyle itp.), co odzwierciedla różne przedziały zamożności konsumentów, mierzone albo poziomem dochodu, albo też poziomem wydatków. W takich sytuacjach można dokonać porównań np. w tej samej grupie społeczno-ekonomicznej gospodarstw, ale w różnych przedziałach uposażenia, co pozwoli na właściwą interpretację reakcji popytowej na różne poziomy dochodów.

Ponadto, w odniesieniu do danych źródłowych istotnym elementem jest uwzględnienie tzw. bezpośrednich mierników popytu (konsumpcji lub wydatków), co przejawia się w odniesieniu poziomu wydatków czy spożycia na osobę w gospodarstwie domowym. Takie bowiem ujęcie uwzględni w syntetycznie ujętym popycie żywnościowym również czynnik demograficzny, obok ekonomicznego.

W niniejszym przykładzie posłużono się danymi statystyki publicznej, a więc uwzględniono tylko jeden – przeciętny – poziom dochodów i wydatków dla grupy społeczno-ekonomicznej pracowników. Uwzględniono tylko czynnik czasowy, brakuje natomiast informacji na temat wewnętrznej (w obrębie grupy społeczno-ekonomicznej) zmienności zamożności konsumentów.

*Po drugie* – horyzont czasowy. W niniejszych rozważaniach dla oszacowania zależności między dochodami i wydatkami przyjęto okres 1993–2000. Istotne jest, aby w każdej analizie i interpretacji elastyczności dochodowej popytu rozważyć wpływ innych czynników, zwłaszcza zewnętrznych, które mogły wpływać na poszczególne reakcje konsumentów. Z reguły dłuższy okres przyjmowany do analizy powoduje redukcję zniekształcającego wpływu uwarunkowań zewnętrznych, jednak go nie eliminuje. Dlatego np. w sytuacjach kryzysowych dla gospodarki czy niepomyślnego przebiegu podstawowych czynników makroekonomicznych należy współczynniki elastyczności interpretować bardzo ostrożnie i uwzględnić ten fakt w ostatecznych konkluzjach.

*Po trzecie* – jakość uwzględnianych czynników ekonomicznych. W analizach reakcji popytu żywnościowego na zmiany dochodu konsumentów właściwym miernikiem będzie uwzględnianie poziomu dochodów i wydatków w ujęciu realnym, czyli skorygowanym analizą zmiany cen. Nie zawsze bowiem wzrost dochodów nominalnych pociąga za sobą wzrost dochodów realnych. Dzieje się tak, kiedy koszty utrzymania spowodowane ogólnym wzrostem cen rosną szybciej niż dochody. W takich sytuacjach trudno zaobserwować typowe prawidłowości kształtowania się wydatków. W odniesieniu do żywności przestaje wtedy funkcjonować prawo Engla, a spadek realnych dochodów wywołuje wzrost udziału wydatków na żywność w wydatkach ogółem.

*Po czwarte* – liczba czynników determinujących popyt. Wszystkie opisane w niniejszym opracowaniu modele ekonometryczne uwzględniają reakcje popytowe na zmianę jednego tylko czynnika ekonomicznego – dochodów. Oczywiście istnieje duże prawdopodobieństwo, iż dochód determinuje wszelkie zachowania i reakcje popytowe, zwłaszcza wśród konsumentów gorzej uposażonych. W ogólności jednak jest to pewne uproszczenie rzeczywistości. To, ile konsumenci wydają oraz jak zmieniają się ich wydatki w miarę zmian dochodu, jest uzależnione od splotu wielu czynników o charakterze społecznym, demograficznym, psychograficznym i ekonomicznym. Niemniej jednak wiele badań i analiz, również i tych zawartych w opracowaniu, uwzględnia dochód jako czynnik wpływający na kształtowanie się popytu konsumpcyjnego, na prawidłowości zachowań konsumentów bądź anomalie i paradoksy tych zachowań, co pozwala podnieść czynnik „dochody” do roli determinant.

*Po piąte* – metoda szacowania współczynników elastyczności dochodowej popytu. Istotne jest, czy do obliczenia tych współczynników zastosowano metodę przyrostową, czy modele ekonometryczne. W dalszej kolejności – czy wyznaczono i zweryfikowano model liniowy, czy też nieliniowy. W badaniach zależności angielskich, jak już wspomniano, stosuje się dwie klasy modeli ekonometrycznych, w zależności od tego, jaką fazę rozwoju spożycia czy wydatków obrazują. Jeżeli opisuje się spożycie czy wydatki na te dobra, które są w fazie szybkiego wzrostu, prawidłowe będzie zastosowanie funkcji rosnących lub malejących nieograniczenie. Z kolei druga grupa modeli ekonometrycznych, bliższa rzeczywistości, odzwierciedla sytuację nasycenia spożycia lub

wydatków określonych dóbr, przy czym tempo wzrostu jest coraz wolniejsze. W tym przypadku najlepsze efekty daje zastosowanie funkcji mających asymptotę. Szczegółowe właściwości tych funkcji opisano powyżej. Różne typy funkcji lepiej lub gorzej odzwierciedlają kształt tendencji popytu na określone dobra. W różnych sytuacjach, np. zakłóceń równowagi rynkowej, nadmiernej inflacji, destabilizacji procesów konsumpcji, istnieje wiele ograniczeń w stosowaniu modeli ekonometrycznych z jedną zmienną objaśniającą. Dlatego też należy bardzo ostrożnie formułować wnioski dotyczące elastyczności dochodowej popytu, a także spostrzeżenia dotyczące wpływu czynników ograniczających.

Należy nadmienić, iż postać zastosowanej funkcji ma ogromny wpływ na wartość uzyskanych współczynników, a zatem i na wnioskowanie o zależnościach między dochodem a popytem. Czasami zastosowanie różnych funkcji do tego samego produktu daje ponad 50-procentowe różnice w wartości współczynników.

*Po szóste* – weryfikacja parametrów modelu ekonometrycznego. Dla prawidłowego wnioskowania należy brać pod uwagę własności funkcji, jej przebieg oraz właściwości uzyskanych współczynników. Przy ostatecznym wyborze postaci funkcji do badania zależności angielskich należy także przeanalizować statystyczne dopasowanie funkcji, wykorzystując wartości parametrów, miary i testy statystyczne, m.in.: współczynniki determinacji, współczynniki korelacji, średni błąd resztowy, średnie błędy ocen, wartości statystyk *t*-Studenta, wartości statystyki *F*. Zazwyczaj dokonuje się weryfikacji merytorycznej i statystycznej. Podczas weryfikacji merytorycznej bada się m.in., czy sensowne są znaki parametrów, czy skala parametrów jest do przyjęcia, czy dany model ekonometryczny jest zgodny z wiedzą ekonomiczną na temat badanego zjawiska czy teorią ekonomii. Weryfikacja ekonomiczna z kolei polega na ocenie dopasowania modelu na podstawie różnych parametrów. Podstawowym z nich jest współczynnik determinacji, który polega na mierzeniu zgodności między zaobserwowanymi wartościami zmiennej objaśnianej (dochody) i wartościami odpowiadającej jej zmiennej objaśniającej (np. wydatki). Współczynnik ów wskazuje, jaka część zaobserwowanej zmienności zmiennej objaśnianej została wyjaśniona przez model ekonometryczny. Z kolei rozbieżności między zmiennymi określone są mianem współczynnika rozbieżności (indeterminacji). Im współczynnik determinacji jest wyższy, tym lepsze dopasowanie modelu. W sytuacji wysokiego współczynnika regresji, czyli ścisłej relacji między zmiennymi, można określić, czy owe zależności nie wystąpiły przypadkowo, przez określenie statystyki *F*. Zależność między zmiennymi istnieje, jeżeli statystyka *F* jest większa niż wartość krytyczna *F* odczytana z tablic, przy poziomie istotności 0,05 dla stopni swobody [ $V_1 = k$ ;  $V_2 = n - (k + 1)$ ], gdzie *k* jest liczbą zmiennych, a *n* – liczbą obserwacji.

Istotność badanych zmiennych można także zweryfikować stosując test *t*-Studenta. Jeżeli wartość statystyki *t* (empiryczna) jest większa od wartości krytycznej odczytanej z tablic, to zmienną objaśniającą uznaje się za istotną. Ponadto, do oceny modelu i poprawności zastosowanej postaci funkcji można wykorzystać także wartość szacunkowego błędu średniego. Im błąd ów jest mniejszy, tym lepiej, gdyż przypuszczalna precyzja estymacji parametrów jest większa.

## WNIOSKI

Przeprowadzone porównanie i ocena metod szacowania współczynników elastyczności, a także analiza tych współczynników pozwalają na wysunięcie następujących konkluzji:

1. W świetle badań, dochód konsumenta pozostaje ważnym czynnikiem kształtującym wielkość i strukturę popytu mierzonego poziomem wydatków. Klasyczne zależności englowskie coraz częściej jednak ulegają załamaniu, głównie wskutek silniejszego oddziaływania innych, pozadochodowych czynników.
2. Istnieje wiele różnych metod określania współczynników elastyczności dochodowej popytu, a ich przydatność uzależniona jest przede wszystkim od:
  - fazy rozwoju spożycia czy wydatków wyrażających popyt na określone produkty, zmienności dochodów, ewolucji spożycia czy wydatków dla poszczególnych dóbr;
  - doboru właściwego modelu ekonometrycznego, oceny jego dopasowania, a także rodzaju i jakości danych źródłowych, które wykorzystano w analizie.
3. Jak wykazano w opracowaniu, różnice w wartościach uzyskanych współczynników z zastosowaniem różnych metod mogą sięgać 50%.
4. Wykazano, iż najlepiej dopasowanymi statystycznie i merytorycznie modelami opisującymi zależności englowskie są funkcje: hiperboliczna Törnquista, hiperboliczno-logarytmiczna Workinga i logarytmiczna. Pierwsze dwie pozwalają na wyznaczenie poziomu nasycenia spożycia czy wydatków, trzecia z kolei odzwierciedla prawidłowość spadku udziału wydatków na większość produktów żywnościowych w miarę wzrostu dochodów.

## PIŚMIENNICTWO

- Bywalec Cz., Rudnicki L., 2002: Konsumpcja, PWE Warszawa.
- Guzik B., 1999: Ekonometria i badania operacyjne. AE Poznań.
- Kos Cz., 1991: Przemiany w spożyciu żywności w gospodarstwach domowych w Polsce. IRWiR PAN Warszawa.
- Mynarski S., 1987: Analiza rynku – problemy i metody. PWN Warszawa.
- Mynarski S., 1993: Analiza rynku. Wyd. AE Kraków
- Rudnicki L., 2000: Zachowania konsumentów na rynku. PWE Warszawa.
- Sznajder M., Senauer B., Asp E., Kinsey J., 1998: Zmieniający się konsument żywności, Poznań.
- Welfe A., 1995: Ekonometria, PWE Warszawa.

## EVALUATION METHODS OF IDENTIFICATION INCOME DEMAND ELASTICITY COEFFICIENTS

**Abstract.** This paper presents different methods of income demand elasticity coefficient evaluation and also verification of these methods. It was showed, that the best statistical adaptation for research of income influence for demand measure by expenditure have



the function with asymptote. The next substantial verification, and also intuitive feeling related to consumer behaviours showed, that the best imitate of food expenditures evolution got in the case of Working model (hyperbolic and logarithmic).

**Key words:** demand, income, income demand elasticity coefficient.

*Michał Sznajder, prof. dr hab., Akademia Rolnicza im. A. Cieszkowskiego w Poznaniu, Katedra Ekonomiki Gospodarki Żywnościowej, ul. Wojska Polskiego 28, 60-637 Poznań  
e-mail: misznajd@au.poznan.pl*

*Grażyna Adamczyk, dr, Akademia Rolnicza im. A. Cieszkowskiego w Poznaniu, Katedra Ekonomiki Gospodarki Żywnościowej, ul. Wojska Polskiego 28, 60-637 Poznań  
e-mail: gradam@au.poznan.pl*